Cantidad de movimiento angular

Para el modelo de la partícula

Conservación de la cantidad de movimiento angular

$$\sum \overline{\mathrm{T}}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt}$$

- Momento o torque de la fuerza

$$\overline{\mathrm{T}}_o = \bar{r}_{i/o} \times \bar{F}_i$$

Cantidad de movimiento angular

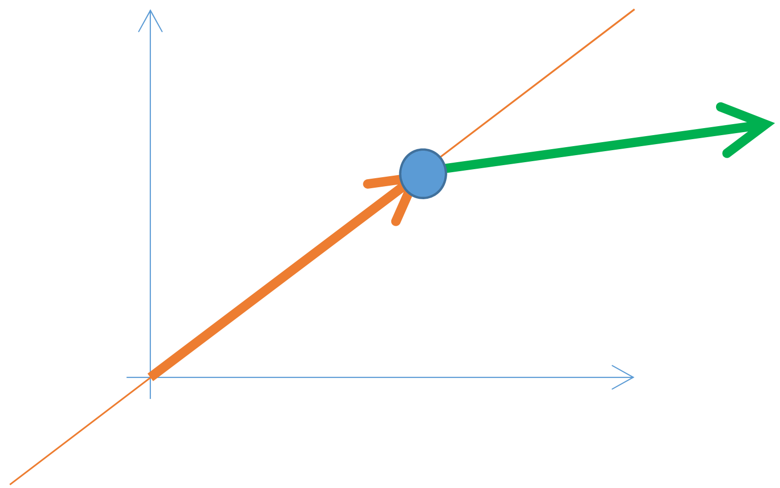
$$\bar{L}_o = \bar{r}_{i/o} \times \bar{P}$$

$$\bar{L}_o = M \cdot \bar{r}_{i/o} \times \bar{v}$$

Torque o momento de una fuerza F respecto de O

$$\bar{T}_o = \bar{r}_o \times \bar{F} = \frac{d\bar{L}_o}{dt}$$

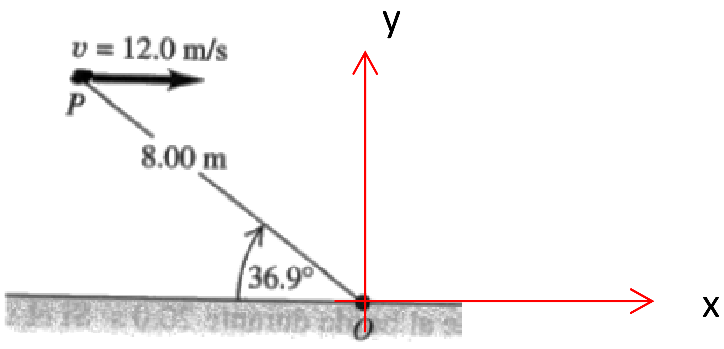
$$|\bar{T}_o| = |\bar{r}_o||\bar{F}|sen(\alpha)$$



- Si el torque es cero, se conserva la cantidad de movimiento angular
- ¿Cuándo el torque es cero?
  - Cuando la fuerza o la posición es cero
  - Cuando la fuerza es paralela a la posición respecto de O

Ejemplo – Ejercicio 1

1. Una piedra de 0,300 kg tiene una velocidad horizontal de 12,0 m/s cuando está en el punto P. ¿Qué momento cinético L, tiene respecto del punto fijo O, en ese instante?



$$\bar{v}_{P/o} = 12\frac{m}{s}\breve{\imath}$$

$$\bar{r}_{P/o} = -6{,}4m\breve{\imath} + 4{,}8m\breve{\jmath}$$

$$\bar{L}_o^P = M \cdot \bar{r}_{P/o} \times \bar{v}_{\ P/o}$$

$$\bar{L}_o^P = 0{,}3kg \cdot (-6{,}4m\breve{\imath} + 4{,}8m\breve{\jmath}) \times \left(12\frac{m}{s}\breve{\imath}\right)$$

$$\bar{L}_o^P = 0{,}3kg \cdot (4{,}8m) \cdot \left(12\frac{m}{s}\right)(-\breve{k}\ )$$

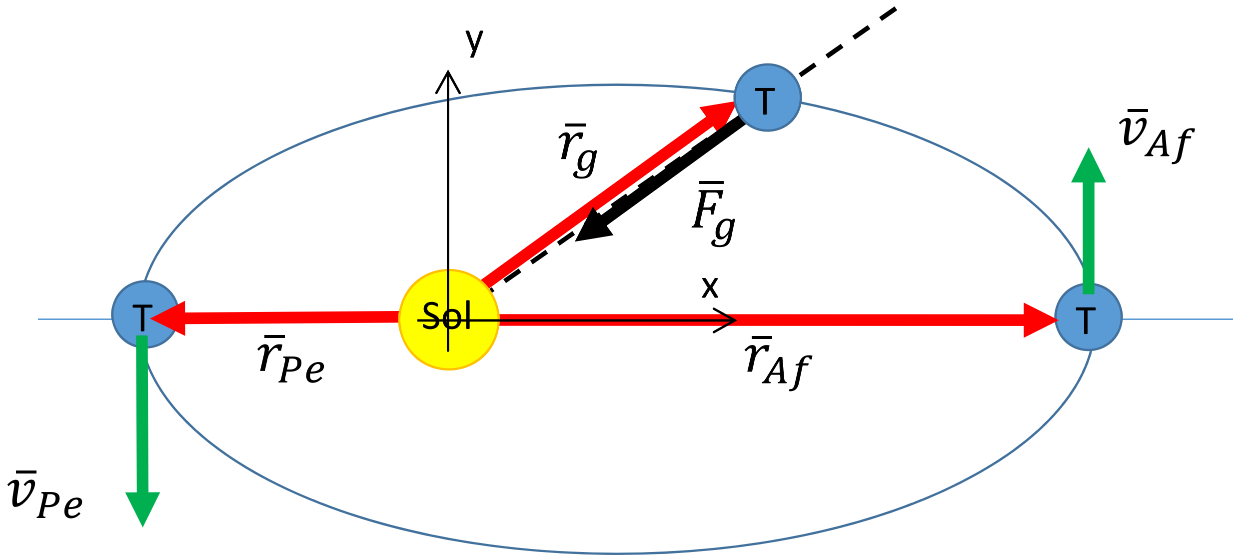
$$\bar{L}_o^P = -17{,}28\frac{kg \cdot m^2}{s}\breve{k}$$

Y esto es constante porque:

- La velocidad constante (la aceleración y fuerza es cero), entonces el torque es cero.
- La velocidad constante así como la componente y de la posición no cambia.

Ejemplo – Ejercicio 3

3. Cuando la Tierra está en el afelio (la posición más alejada del Sol) el 2 de julio, su distancia al Sol es de 1.52 1011 m y su velocidad orbital es de 2.93 104 m/s. (a) Hallar su velocidad orbital en el perihelio (posición más cercana al Sol), aproximadamente seis meses después, cuando su distancia al Sol es de 1.47 1011 m. (b) Hallar la velocidad angular de la Tierra alrededor del Sol en ambos casos. (Sugerencia: En ambas posiciones, afelio y perihelio, la velocidad es perpendicular al radio vector.) (c) Dibujar el vector aceleración y sus componentes intrínsecas en distintos puntos de la órbita elíptica.



$$\bar{T}_{Sol} = \bar{r}_g \times \bar{F}_g = 0 = \frac{d\bar{L}_{Sol}}{dt} \qquad \Rightarrow \bar{L}_{Sol} \text{ es constante}$$

$$\bar{L}_{Sol}^{Af} = M \cdot \bar{r}_{Af} \times \bar{v}_{\ Af}$$

$$\bar{L}_{Sol}^{Af} = M \cdot \left(R_{Af}\breve{\imath}\right) \times \left(v_{Af}\breve{\jmath}\right) = M \cdot R_{Af} v_{Af} \breve{k}$$

$$\bar{L}_{Sol}^{Pe} = M \cdot \bar{r}_{Pe} \times \bar{v}_{\ Pe}$$

$$\bar{L}_{Sol}^{Pe} = M \cdot (-R_{Pe}\breve{\imath}) \times (-v_{Pe}\breve{\jmath}) = M \cdot R_{Pe} v_{Pe} \breve{k}$$

$$\bar{L}_{Sol}^{Af} = \bar{L}_{Sol}^{Pe}$$

$$\cancel{M} \cdot R_{Af} v_{Af} \breve{k} = \cancel{M} \cdot R_{Pe} v_{Pe} \breve{k}$$

$$v_{Pe} = \frac{R_{Af} v_{Af}}{R_{Pe}} = 3{,}03 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

$$\bar{v}_{Pe} = -3{,}03 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \breve{j}$$

b) $$\bar{L}_o = M \cdot |\bar{r}_o|^2 \cdot \bar{\Omega}$$

$$\bar{L}_{Sol}^{Af} = M \cdot \left|\bar{r}_{Af}\right|^2 \cdot \bar{\Omega}_{Af}$$

$$\bar{L}_{Sol}^{Pe} = M \cdot |\bar{r}_{Pe}|^2 \cdot \bar{\Omega}_{Pe}$$

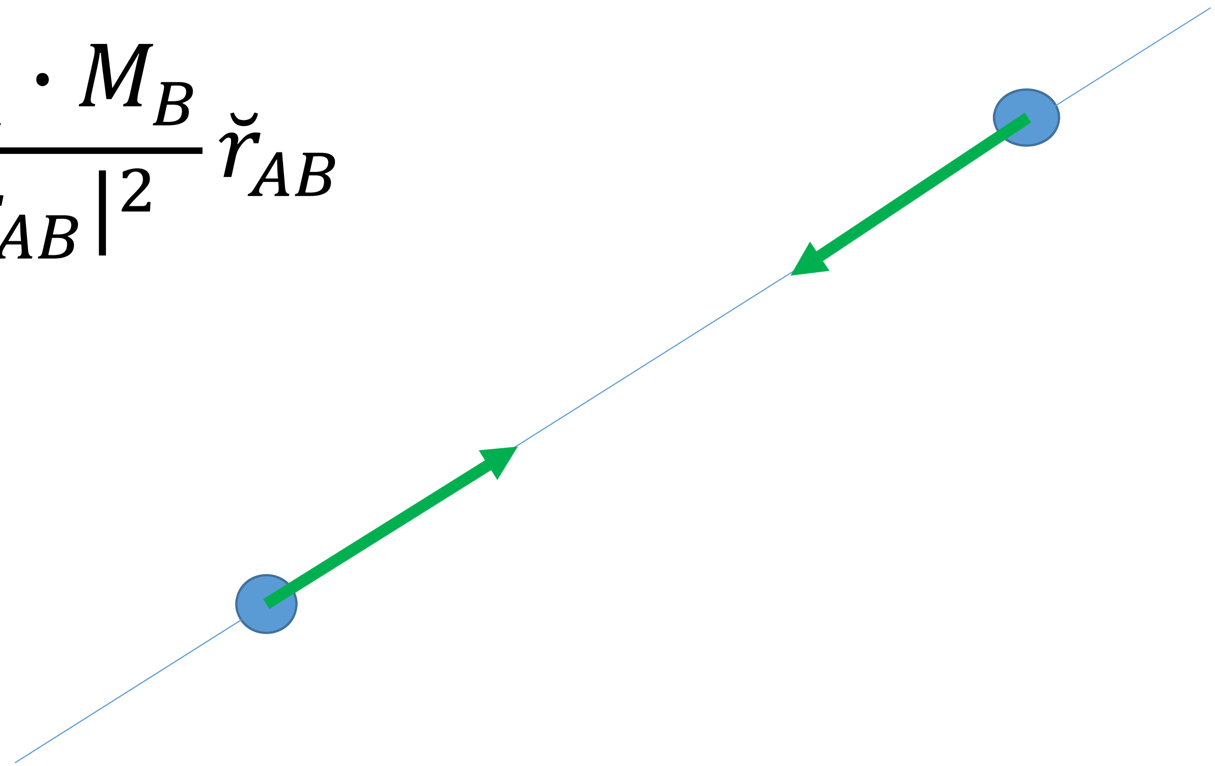
Sólo les queda a ustedes completar estas cuentas para determinar la velocidad angular en cada caso.

EXTRA:

DEMOSTRACIÓN DE 2° LEY DE KEPLER

Aplicación: 2° Ley de Kepler

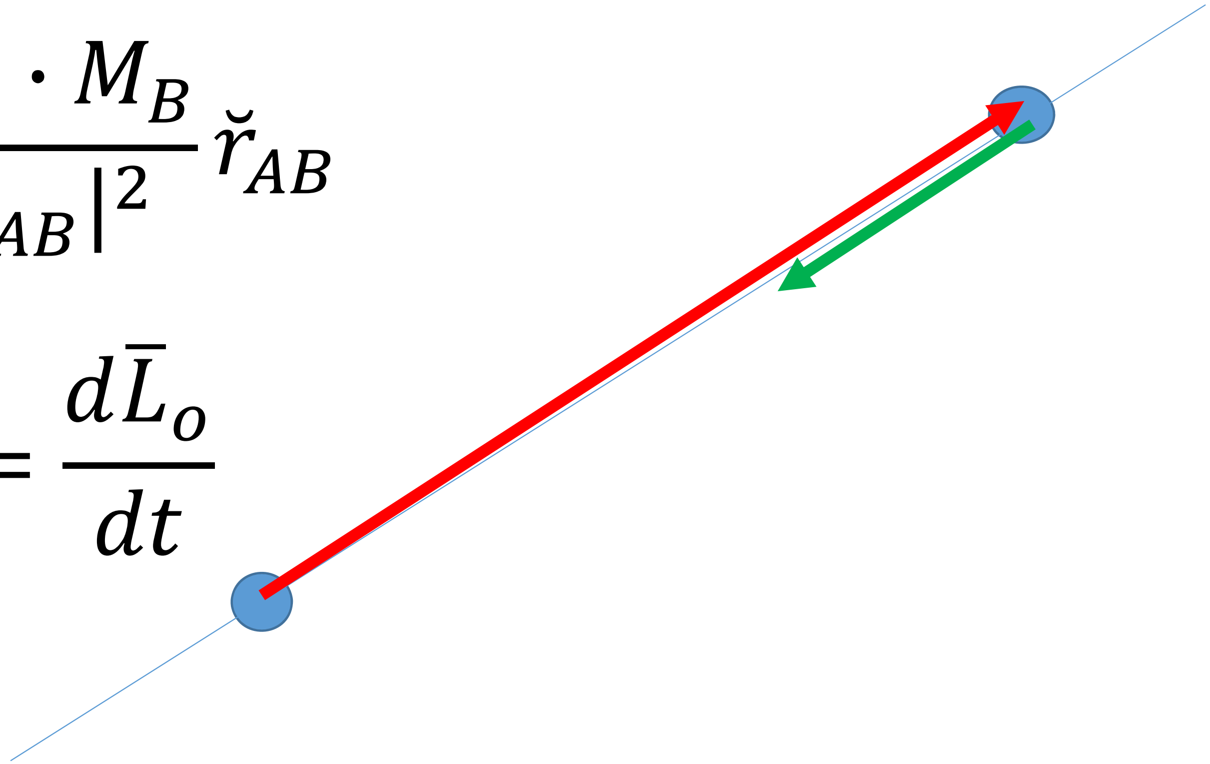
$$|\bar{F}_{Grav}| = G \cdot \frac{M_A \cdot M_B}{|r_{AB}|^2} \breve{r}_{AB}$$



Aplicación: 2° Ley de Kepler

$$|\bar{F}_{Grav}| = G \cdot \frac{M_A \cdot M_B}{|r_{AB}|^2} \check{r}_{AB}$$

$$\bar{T}_o = \color{red}{\bar{r}_o} \times \color{green}{\bar{F}} = 0 = \frac{d\bar{L}_o}{dt}$$



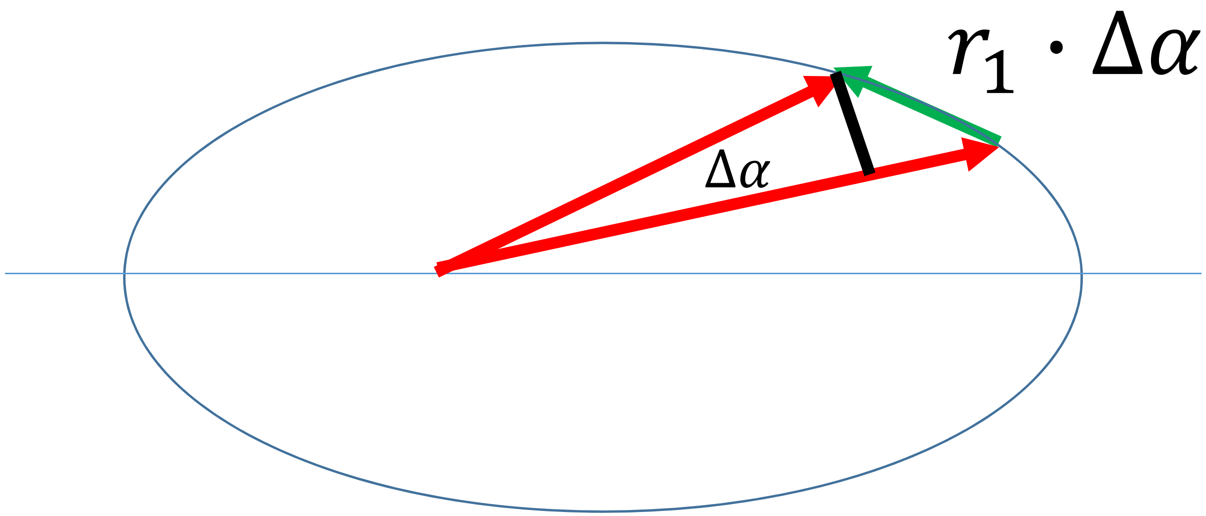
Aplicación: 2° Ley de Kepler

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = 0$$

$$|\bar{L}_o| = M_B \cdot \left|\bar{r}_{o/B_1}\right|^2 \cdot |\Omega_1| = C$$

$$\left|\bar{r}_{o/B_1}\right|^2 \cdot |\Omega_1| = \frac{C}{M_B}$$

Aplicación: 2° Ley de Kepler



$$\frac{Area}{\Delta t} = \frac{Sup\ Triang}{\Delta t} = \frac{r_1 \cdot r_1 \cdot \Delta\alpha}{2 \cdot \Delta t}$$

Aplicación: 2° Ley de Kepler

$$\frac{Area}{\Delta t} = \frac{Sup\ Triang}{\Delta t} = \frac{{r_1}^2 \cdot \Delta\alpha}{2 \cdot \Delta t}$$

$$v_{aer} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Area}{\Delta t} = {r_1}^2 \cdot \Omega_{\ 1} = \frac{C}{M_B}$$

- Y es constante